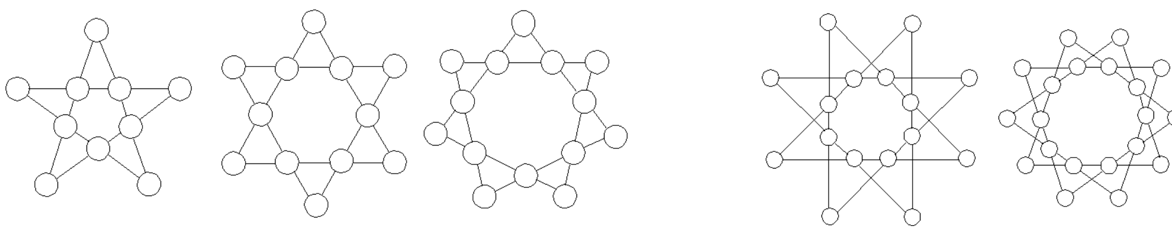
MAGICKÉ HVIEZDY

MARIÁN TRENKLER

Pravdepodobne ste sa už stretli s nasledujúcimi hlavolamami, ktorých autorom je anglický matematik **Henry Dudeney**. (Viď [1], str. 102.)

Úloha 1. Do krúžkov hviezdy $\mathbb{S}_5$ (obr .1) vpíšte 10 rôznych čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ tak, aby súčet čísel na každej priamke (strane) bol dvadsaťštyri.

Úloha 2. Umiestnite do krúžkov osemcípej hviezdy $\mathbb{S}_8$ čísla $1, 2, 3, 4, \ldots, 16$ tak, aby bol súčet čísel na každej priamke bol tridsať.



OBRÁZOK 1

V tomto príspevku sa budeme zaoberať riešením týchto úloh a popíšeme ich zovšeobecnenie.

Na obrázku 1 je nakreslených päť hviezd dvoch typov. Prvé tri n-cípe hviezdy sú označené $\mathbb{S}_n$ pre $n = 5, 6, 7$ a zostávajúce dve $\mathbb{T}_n$ pre $n = 8, 10$. Vo všetkých hviezdach je umiestnených $2n$ krúžkov tak, že na každej priamke sú práve štyri. Hviezdy oboch typov sú vytvorené z pravidelného n-uholníka $v_1 v_2 \ldots v_n$ na vrcholoch ktorého je n krúžkov $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Ďalších n krúžkov $U_1, U_2, \ldots, U_n$ je v ich cípoch. Vo hviezde $\mathbb{S}_n$ (ktorá je definovaná pre $n \geq 5$) je U_i umiestený na priesečníku priamok $v_{i-2}v_{i-1}$ a $v_i v_{i+1}$ a vo hviezde $\mathbb{T}_n$, $n \geq 7$, je U_i umiestený na priesečníku priamok $v_{i-2}v_{i-1}$ a $v_{i+1}v_{i+2}$ pre $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ (pričom $v_{-2} = v_{n-2},\ v_{-1} = v_{n-1},\ v_0 = v_n,\ v_{n+1} = v_1,\ v_{n+2} = v_2$). (Viď obrázok 5.)

n-cípu hviezdu $\mathbb{S}_n$, respektíve $\mathbb{T}_n$, nazývame *magická hviezda* a označujeme ju $\mathbb{S}_n^M$, resp. $\mathbb{T}_n^M$, ak v jej krúžkoch sú umiestnené prirodzené čísla $1, 2, 3, 4, \ldots, 2n$ tak, že súčet štyroch čísel na každej priamke je rovnaký. V literatúre sa magické hviezdy $\mathbb{S}_n$ nazývajú aj *Dávidove magické hviezdy.* Súčet čísel na každej priamke sa rovná dvojnásobku súčtu všetkých čísel delený číslom n, t.j. je rovný $4n + 2$. Hviezdu $\mathbb{S}_n$, resp. $\mathbb{T}_n$, nazývame *slabo-magická hviezda* a označujeme $\mathbb{S}_n^W$, resp. $\mathbb{T}_n^W$, ak do jej krúžkov je vpísaných $2n$

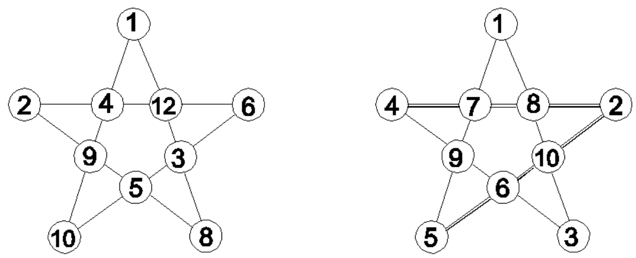
Obzory matematiky, fyziky a informatiky 51(1998)1-7

navzájom rôznych prirodzených čísel tak, že ich súčet na každej priamke je rovnaký. Každá magická hviezda je aj slabo-magická, obrátene to však neplatí. Ak v krúžkoch hviezdy sú umiestnené čísla $1, 2, 3, \ldots, 2n$ tak, že súčet na $n-2$ priamkach je $4n+2$, na jednej $4n+1$ a druhej $4n+3$, tak ju nazývame *takmer-magická hviezda* a označujeme ju $\mathbb{S}_n^A$, resp. $\mathbb{T}_n^A$.

Vráťme sa k úlohe 1. Jej riešenie je uvedené v nasledujúcej vete:

Veta 1. $\mathbb{S}_5$ *je slabo-magická aj takmer-magická, ale nie je magická hviezda.*

Dôkaz. Na obrázku 2 je nakreslená slabo-magická hviezda $\mathbb{S}_5^W$ a takmer-magická hviezda $\mathbb{S}_5^A$. Súčty čísel na priamkach (nakreslených dvojitými čiarami) $\mathbb{S}_5^A$ obsahujúcich číslo 2 sú 21 a 23.



Obrázok 2

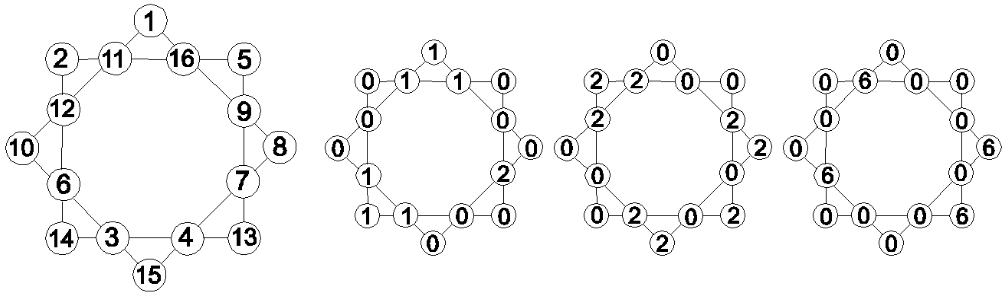
Dôkaz neexistencie urobíme nepriamo. Predpokladajme, že existuje magická hviezda $\mathbb{S}_5^M$. Na každej priamke sa nachádzajú práve štyri rôzne čísla, ktorých súčet je 22. Každé číslo sa nachádza práve na dvoch priamkach, ktoré neobsahujú žiadne iné rovnaké číslo. Na jednotlivých priamkach môžu byť len nasledujúce štvorice čísel:
(10,9,2,1), (10,8,3,1), (10,7,4,1), (10,7,3,2), (10,6,5,1), (10,6,4,2), (10,5,4,3),
(9,8,4,1), (9,8,3,2), (9,7,5,1), (9,7,4,2), (9,6,5,2), (9,6,4,3),
(8,7,6,1), (8,7,5,2), (8,7,4,3), (8,6,5,3), (7,6,5,4).

V magickej hviezde $\mathbb{S}_5^M$ musia existovať dve priamky, na ktorých je číslo 10. Predpokladajme, že na prvej priamke sú čísla (10,9,2,1). Na druhej priamke, ktorá obsahuje 10 môže byť len štvorica čísel (10,5,4,3), lebo vo všetkých ostatných štvoriciach obsahujúcich 10 sa nachádza číslo 1 alebo 2. Podobne aj číslo 9 sa nachádza na práve dvoch priamkach. Uvážme druhú priamku obsahujúcu číslo 9. Táto nemôže obsahovat čísla 2, 1 a preto do úvahy prichádza len štvorica (9,6,4,3), ale v tejto je dvojica 4,3, ktorá je na druhej priamke obsahujúcej 10. Ak na jednej priamke sú čísla (10,8,3,1), respektíve (10,7,3,2), tak na druhej musia byť (10,6,4,2), respektíve (10,6,5,1). Podobnou úvahou, ako vyššie, ukážeme, že ani tieto prípady nemôžu nastať. Okrem týchto troch prípadov, neexistujú iné dve štvorice čísel, ktoré obsahujú číslo 10 a neobsahujú žiadne iné spoločné číslo. □

Riešenie úlohy 2:

Pojmom *elementárna n-cípa hviezda* $\mathbb{E}_n$ rozumieme hviezdu $\mathbb{S}_n$ alebo $\mathbb{T}_n$, do krúžkov ktorej sú vpísané celé čísla $0, k$ alebo $0, k, 2k$ tak, že súčet čísel na každej priamke je rovnaký.

Na obr. 3 je nakreslená magická hviezda $\mathbb{S}_8^M$ a tri elementárne 8-cípe hviezdy. Magickú hviezdu $\mathbb{S}_8^M$ sme dostali tak, že sme sčítali hodnoty deviatich elementárnych hviezd, ktoré sú uvedené v riadkoch tabuľky 1. V deviatich riadkoch sú ohodnotenie elementárnych hviezd. Posledný riadok obsahuje čísla, ktoré sú vpísané do jednotlivých krúžkov. Elementárne hviezdy, ktoré sú nakreslené na obrázku 3 sú v treťom, piatom a deviatom riadku tabuľky 1.

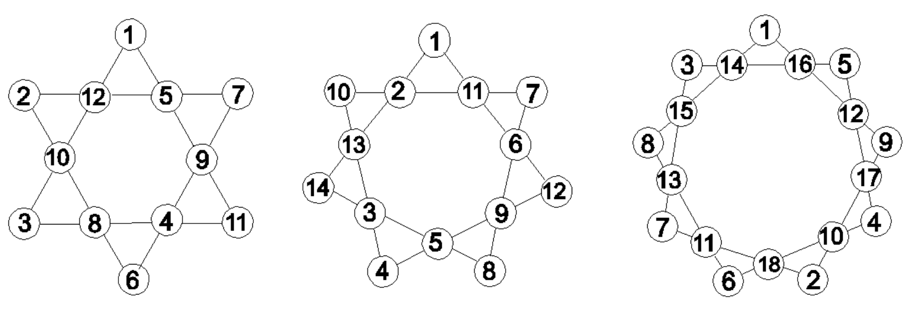


Obrázok 3

U_1	U_2	V_1	V_8	U_8	V_2	V_7	U_3	U_7	V_3	V_6	U_4	V_4	V_5	U_6	U_5
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	2	1	1	0	0	0
0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	2
0	2	2	0	0	2	2	0	2	0	0	0	2	0	2	2
0	0	0	5	0	0	0	5	0	0	5	5	0	0	0	0
0	0	0	5	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	5	5
0	0	0	5	5	5	5	5	0	0	0	5	0	5	0	5
0	0	6	0	0	0	0	0	6	6	0	0	0	0	6	0
-1	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0
1	2	11	16	5	12	9	10	8	6	7	14	3	4	13	15

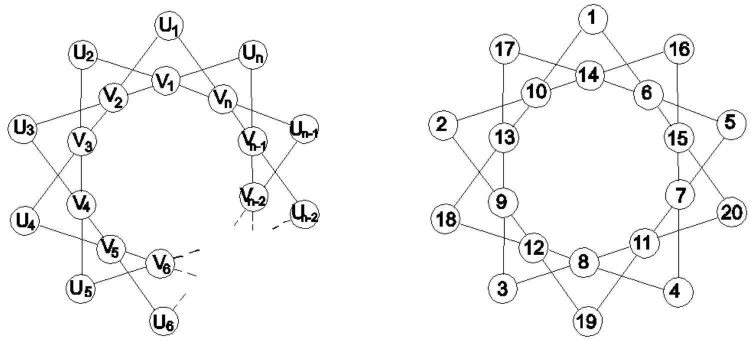
Tabuľka 1 - Konštrukcia $\mathbb{S}_8^M$

Na obrázku 4 sú nakreslené magické hviezdy $\mathbb{S}_i^M$ pre $i = 6, 7, 9$. Hodnoty $\mathbb{S}_i^M$ pre $i = 9, 11$ sú v tabuľke 4. Tieto vznikli "experimentovaním". Vo všeobecnosti nepoznáme algoritmus na vytváranie $\mathbb{S}_n^M$. Prirodzene vzniká otázka, pre ktoré hodnoty n existuje magická hviezda $\mathbb{S}_n^M$. Pre niektoré hodnoty n môžeme nájsť $\mathbb{S}_n^M$ použitím výpočtovej techniky.



Obrázok 4

Iná situácia je s hviezdami $\mathbb{T}_n$, kde poznáme algoritmus na vytváranie $\mathbb{T}_n^M$ pre všetky párne $n \geq 8$. Na obrázku 5 je nakreslená magická hviezda $\mathbb{T}_{10}^M$.



Obrázok 5 - Hviezdy $\mathbb{T}_n$ a $\mathbb{T}_{10}$

Veta 2. *Magická hviezda $\mathbb{T}_n$ existuje pre všetky párne prirodzené čísla $n \geq 8$.*

Dôkaz. Rozdeľme čísla $1, 2, \ldots, 2n$ do štyroch riadkov tak, ako je to v tabuľke 3. Pri ohodnocovaní využijeme to, že platí:

$$i + (n - i + 1) = n + 1 \qquad (n + i) + (2n - i + 1) = 3n + 1 \quad pre \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tfrac{n}{2},$$

$$(i + 1) + (n - i + 1) = n + 2 \qquad (n + i) + (2n - i) = 3n \quad pre \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tfrac{n-2}{2}.$$

U_1	U_3	U_5	U_7	$\ldots$	U_{n-3}	U_{n-1}
V_2	V_4	V_6	V_8	$\ldots$	V_{n-2}	V_n
V_{n-3}	V_{n-5}	V_{n-7}	V_{n-9}	$\ldots$	V_1	V_{n-1}
U_{n-2}	U_{n-4}	U_{n-6}	U_{n-8}	$\ldots$	U_2	U_n

Tabuľka 2

1	2	3	4	$\ldots$	$\frac{n}{2}$
n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$\ldots$	$\frac{n}{2}+1$
$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$\ldots$	$\frac{3n}{2}$
$2n$	$2n-1$	$2n-2$	$2n-3$	$\ldots$	$\frac{3n}{2}+1$

Tabuľka 3

Do krúžku, ktorý je v i-tom riadku a j-tom stĺpci tabuľky 2 vpíšeme číslo z i-teho riadku a j-teho stĺpca tabuľky 3. Na každej priamke, okrem priamky $v_{n-1}v_n$, hviezdy $\mathbb{T}_n$ sa nachádzajú dve dvojice krúžkov, ktorých súčty sú $[(n+1)+(3n+1)]$ alebo $[(n+2)+3n]$. Na priamke $v_{n-1}v_n$ sú čísla $(\frac{n}{2}+1)$, 1, $\frac{3n}{2}$, $2n$, ktorých súčet je $4n+2$. $\square$

O slabo-magických hviezdach platí veta:

Veta 3. *Slabo-magická hviezda* $\mathbb{S}_n^W$ *aj* $\mathbb{T}_n^W$ *existuje pre všetky prirodzené čísla* $n \geq 7$.

Nech U a V sú dva krúžky hviezdy ($\mathbb{S}_n$ alebo $\mathbb{T}_n$) a $\mathbb{E}_n$ elementárna hviezda. Hovoríme, že $\mathbb{E}_n$ *oddeľuje krúžky* U a V, keď im priraďuje navzájom rôzne čísla. Ľahko sa presvedčíme, že pre každú dvojicu krúžkov hviezdy $\mathbb{S}^n$ aj $\mathbb{T}^n$, $n \geq 7$, existuje elementárna hviezda $\mathbb{E}_n$, ktorá ich oddeľuje.

Dôkaz. Do každého krúžku hviezdy vpíšeme číslo 1. Slabo-magické ohodnotenie hviezdy $\mathbb{S}_n$ vytvoríme viacnásobný použitím nasledujúcej konštrukcie:

Ak v krúžkoch U a V sú rovnaké čísla, tak zvoľme elementárnu hviezdu $\mathbb{E}_n$, ktorá ich oddeľuje. Pripočítaním ohodnotenia $\mathbb{E}_n$ k pôvodnému ohodnoteniu a dostaneme nové ohodnotenie, v ktorom krúžkom U a V budú priradené rôzne čísla. Ak si za k zvolíme číslo, ktoré je väčšie ako všetky v pôvodnom ohodnotení, tak každé dva krúžky, ktoré mali rôzne čísla budú mať rôzne čísla aj v novom ohodnotení.

Ak existujú dva rôzne krúžky s rovnakým číslom zopakujeme uvedenú konštrukciu. Po konečnom počte opakovaní dostaneme slabo-magickú hviezdu. □

Poznámka 1. Uvedená konštrukcia vedie k tomu, že v $\mathbb{S}_n^W$ aj $\mathbb{T}_n^W$ sa nachádzajú pomerne veľké čísla. Ak si zvolíme vhodne elementárne hviezdy a hodnoty k, tak dostaneme magické ohodnotenie (ak existuje), prípadne slabo-magickú hviezdu s malými číslami.

V tabuľke 4 sú uvedené niektoré špeciálne hviezdy.

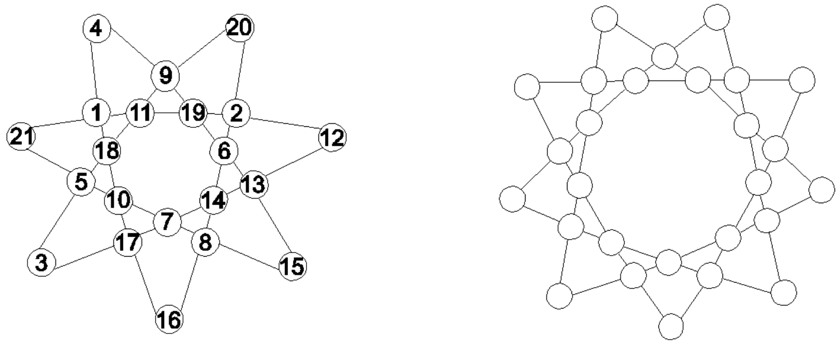
V prvom riadku je $\mathbb{S}_6^M$ taká, že súčet čísel v krúžkoch $U_1, U_2, \ldots, U_6$ je rovnaký ako na jednotlivých priamkach. V druhom riadku je uvedená $\mathbb{S}_6^W$, ktorej prvky všetky sú prvočísla. (V literatúre sa takáto hviezda nazýva aj *Dávidova prvočíselná magická hviezda*). V takmer-magickej hviezde $\mathbb{T}_7^W$ (riadok 5) je súčet rôzny na priamkach, na ktorých sa nachádza číslo 6.

	U_1	V_1	U_2	V_2	U_3	V_3	U_4	V_4	U_5	V_5	U_6	V_6	U_7	V_7	U_8	V_8	U_9	V_9	U_{10}	V_{10}	U_{11}	V_{11}
S_6^M	1	9	5	12	4	3	6	11	8	7	2	10										
$\mathbb{S}_6^W$	29	31	53	71	73	43	37	41	47	67	59	61										
$\mathbb{S}_9^M$	1	14	3	15	8	13	7	11	6	18	2	10	4	17	9	12	5	16				
$\mathbb{S}_{11}^M$	1	19	7	16	10	18	5	15	3	17	9	22	4	13	2	21	8	12	11	20	6	14
$\mathbb{T}_7^A$	1	8	2	14	3	11	4	10	7	12	6	9	5	13								
$\mathbb{T}_8^M$	1	11	14	8	2	10	15	7	3	9	16	6	4	12	13	5						

Tabuľka 4

Podobné otázky si môžeme klásť aj v prípade inak definovaných hviezd. Dve takéto hviezdy, ktoré sme označili $\mathbb{ST}_n$ $n = 7, 9$ sú na obrázku 6. V prvej sú uvedené čísla $1, 2, \ldots, 21$ tak, že súčet šiestich čísel na každej priamke je 66.

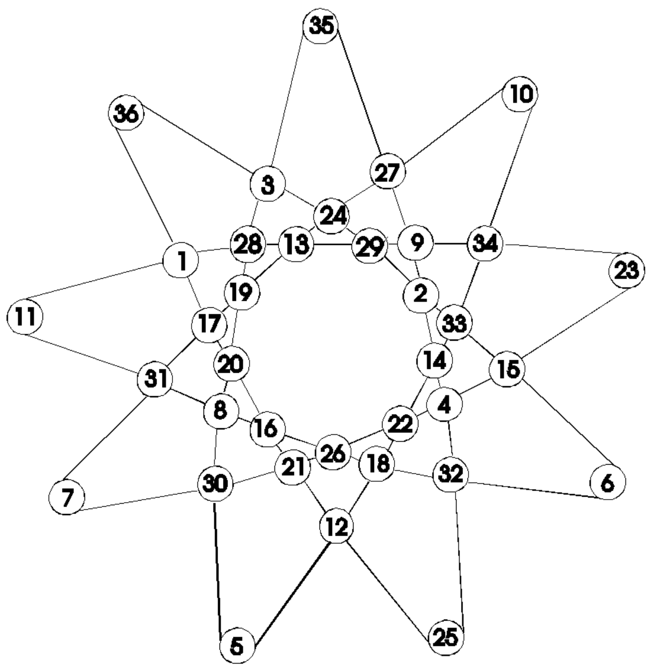
Úloha 3. Do krúžkov hviezdy $\mathbb{ST}_9$, ktorá je na obrázku 6 vpíšte 27 rôznych prirodzených čísel tak, aby súčet šestice čísel na každej priamke bol rovnaký.



Obrázok 6 - Hviezdy $\mathbb{ST}_7$ a $\mathbb{ST}_9$

Poznámka 2. Ak sa čitateľovi podarí nájsť magickú hviezdu $\mathbb{S}_n^M$ pre $n \geq 12$ alebo $\mathbb{T}_n^M$ pre nepárne n, prípadne vymyslíte novú úlohu, tak prosím o informáciu. Tieto by mohli byť podkladom pre iný príspevok, ktorý by obsahoval aj úlohy, ktoré sme tu neuviedli.

Na záver pripájame ešte jednu magickú hviezdu, ktorá je nakreslená na obrázku 7.



Obrázok 7

Literatúra

1. Miloš Zapletal, *Kniha hlavolamov*, Mladé letá Bratislava (Albatros Praha), 1987.

Katedra geometria a algebry PF UPJŠ, Jesenná 5, 041 54 Košice
E-mail address: trenkler@duro.science.upjs.sk